UTN HAEDO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

Nombre y Apellido:...
Correo:...
Curso cuatrimestral — *Fecha:02/12/25*

Recuperatorio Primer de Análisis II

Ejercicios	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	Nota
Puntaje											

Ejercicio 1a) *Determine gráfica y analíticamente el dominio de la siguiente función* $f(x,y)=\frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{Ln(4x-6-2y)}$*.Clasifica el dominio.*

Ejercicio 1b) *Sea la función* $z=P(x,y)$ *siendo* $P(x,y)$ *el polinomio de Brook Taylor de primer orden correspondiente al desarrollo de la función* $z=Sin(x+y)$ *en un entorno de* $(x_0,y_0)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *y sea la superficie cónica* **S** *dada por la ecuación* $x^2+y^2-2z^2=0$ *Probar que la superficie* **S** *es ortogonal a* $z=P(x,y)$ *en el punto* $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$*. Justificar el procedimiento utilizado para su desarrollo en cada paso.*

Ejercicio2a) *Dada la siguiente función* $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^2+y^2-y} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *Se pide determinar si la función es continua en el origen.*

Ejercicio 2b) *Escribe las propiedades que cumple una función diferenciable en un punto y su interpretación geométrica en el caso de una función de dos variables independientes. La función f(x,y) dada en el punto anterior ¿es diferenciable en el origen?*

Ejercicio 3a) *Hallar* $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ *y expresar el* dz *, si* $\begin{cases}x-u-Ln(v)=0\\ y-v+Ln(u)=0\end{cases}$ *define a* $u=u(x,y)$ *y* $v=v(x,y)$ *siendo* $z=2u+3v$ *en* $(u_0,v_0)=(1,1)$*.*

Ejercicios 3b) *Hallar la distancia mínima y máxima de la cónica* $5x^2+6xy+5y^2-16=0$ *al origen de coordenadas. Considera el método de los* ***multiplicadores de Lagrange*** *formando su función con la que hay que optimizar y su restricción. Explique la condición necesaria para la existencia de extremos y su interpretación geométrica.*

Ejercicio4a) *Calcular, la derivada direccional de la siguiente función escalar* $f(x,y)=\frac{1}{3}x^2-3xy$ *en el punto de coordenadas* $(-1,0)$ *y en la dirección dada por la recta* $y=x+1$ *sentido positivo del* ***eje y****. ¿En qué direcciones se anula la derivada direccional? Realiza un gráfico en el plano de todo lo pedido. Explica la relación analítica y geométrica entre la derivada direccional y el vector gradiente.*

Ejercicio 4b) *Determinar los puntos críticos de* $f(x,y)$ *si* $\nabla f(x,y)=(h(x)+6xy-2y-3;3x^2-2x-1)$ *donde* $h(x)$ *es la solución particular de la siguiente ecuación diferencial* $\frac{h'}{10}+\frac{3}{5x}=-\frac{1}{5x}h$ *que pasa por el punto de coordenadas* $(1;15)$*.Clasifícalos.*

Ejercicio 5a) *Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas* $y^b-ax=0$

Ejercicio 5b) *Una curva que responde a una función* $y=f(x)$ *pasa por el origen. Por un punto arbitrario de la curva, suponte en el primer cuadrante, se trazan paralelas a los ejes de tal manera que forma un rectángulo con ellos. La curva divide al rectángulo en dos regiones A y B tal que una de ellas tiene un área n veces la otra. Hallar la función* $y=f(x)$*.*

Condición de aprobación : 50 % del parcial bien realizado .Hora de finalización: Entre 21:15 y 21:30

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH	1º parcial - recuperatorio	HOJA Nº 1/4
		FECHA 2-12-25

EJ 1 a) Determinar gráfica y analíticamente el dominio de

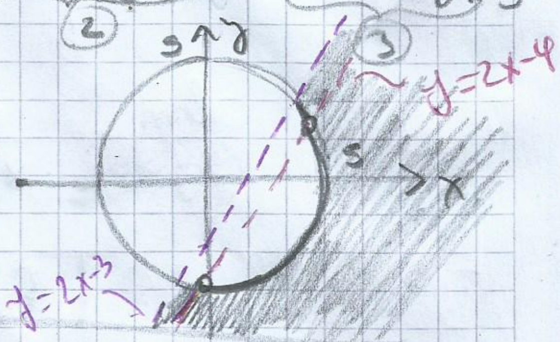
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{25-x^2+y^2}}{\ln(4x-6-2y)}$$

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{25-x^2-y^2 \geq 0}_{1} \wedge \underbrace{4x-6-2y \neq 1}_{2} \wedge \underbrace{4x-6-2y > 0}_{3}\}$$

① $25 \geq x^2+y^2$

② $2x-3-y \neq 1 \rightarrow y \neq 2x-4$

③ $2x-3 > y$



$$\boxed{Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2+y^2 \leq 25 \wedge y \neq 2x-4 \wedge y < 2x-3\}}$$

1.b) Sea la función $z = P(x,y)$ siendo $P(x,y)$ el pol. de Taylor de primer orden correspondiente al desarrollo de la función $z = sen(x+y)$ en un entorno de $(x_0,y_0) = (\pi/2, \pi/2)$ y sea la sup. cónica S dada por $x^2+y^2-2z^2=0$

Probar que S es ortogonal a $z = P(x,y)$ en $(1,1,1)$

$$P(x,y) = \underbrace{z(\pi/2,\pi/2)}_{0} + \underbrace{z'_x(\pi/2,\pi/2)}_{-1}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{z'_y(\pi/2,\pi/2)}_{-1}(y-\pi/2)$$

$\varepsilon(\pi/2,\pi/2)$

$sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = sen(\pi) = 0$

$z'_x = \cos(x+y) \rightarrow z'_x(\pi/2,\pi/2) = \cos(\pi) = -1$

$z'_y = \cos(x+y) \rightarrow z'_y = -1$

$$P(x,y) = -x+\frac{\pi}{2} - y + \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{P(x,y) = -x-y+\pi}$$

$z = -x-y+\pi \rightarrow N = (1,1,1)$

$S: x^2+y^2-2z^2=0 \rightarrow N_S = (2x, 2y, -4z) \rightarrow N_{S(1,1,1)} = (2,2,-4)$

si $N_{P(x,y)} \cdot N_{S(1,1,1)} = 0 \rightarrow N_{P(x,y)} \perp N_{S(1,1,1)} \rightarrow$ sup. ortogonales

$(1,1,1)\,(2,2,-4) = 0$ ✓ $\rightarrow \boxed{S \perp \text{gráfico } P(x,y)}$

NOTA:

(resuelto por Sylvina)

EJ 2 a) Dada la sig función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2-y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Determinar si f es continua en el origen

- $f(0,0) = 0$
- ¿ $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2-y} \xrightarrow{\text{por } y=0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

$y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2)^2}{\cancel{x^2}+(x^2)^2-\cancel{x^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

$0 \neq 1$

$\nexists \lim$

$\boxed{f \text{ NO es continua en } (0,0)}$

b) Escribir las propiedades que cumple una función diferenciable en un punto, y su interpretación geométrica en el caso de una función de dos variables independientes

La función $f(x,y)$ dada en el punto anterior ¿es diferenciable en el origen?

Si f es diferenciable en A $\Rightarrow$ f es continua en A

Si f es diferenciable en A $\Rightarrow$ f es derivable en A

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) $\Rightarrow$ f admite plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

La función del punto anterior NO es diferenciable en $(0,0)$ porque f no es continua en $(0,0)$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH	1º parcial - recuperatorio	HOJA Nº 2/4 — FECHA 2-12-25

Ej 3 a) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y expresar dz si $\begin{cases} x - u - \ln(v) = 0 \\ y - v + \ln(u) = 0 \end{cases}$

define a $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ siendo $z = 2u + 3v$ en $(u_0, v_0) = (1,1)$

u y v son variables dependientes

x e y son variables INdependientes

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - u - \ln(v) \\ G(x,y,u,v) = y - v + \ln(u) \end{cases} \to \text{Busco} \quad \underbrace{\begin{matrix} F'_x = 0 & F'_y = 0 \\ G'_x = 0 & G'_y = 0 \end{matrix}}_{\text{tomando a } u \text{ y } v \text{ como funciones}}$$

$$F(x_0, y_0, \overset{u_0}{1}, \overset{v_0}{1}) = 0 = x_0 - 1 - 0 \to \boxed{x_0 = 1}$$

$$G(x_0, y_0, 1, 1) = 0 = y_0 - 1 + 0 \to \boxed{y_0 = 1} \quad \boxed{u = 1} \quad \boxed{v = 1}$$

$$\begin{cases} F'_x = 0 = 1 - u'_x - \frac{1}{v} \cdot v'_x \longrightarrow u'_x + \frac{1}{v} v'_x = 1 & \text{I} \\ F'_y = 0 = -u'_y - \frac{1}{v} \cdot v'_y \longrightarrow -u'_y - \frac{1}{v} v'_y = 0 & \text{II} \\ G'_x = 0 = -v'_x + \frac{1}{u} \cdot u'_x \longrightarrow -v'_x + \frac{1}{u} u'_x = 0 & \text{III} \\ G'_y = 0 = 1 - v'_y + \frac{1}{u} u'_y \longrightarrow v'_y - \frac{1}{u} u'_y = 1 & \text{IV} \end{cases}$$

$u_0 = v_0 = 1$: I y III : $\begin{cases} u'_x + v'_x = 1 \\ u'_x - v'_x = 0 \end{cases} \to u'_x = \frac{1}{2} \quad v'_x = \frac{1}{2}$

II y IV : $\begin{cases} u'_y + v'_y = 0 \\ -u'_y + v'_y = 1 \end{cases} \to u'_y = -\frac{1}{2} \quad v'_y = \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u'_x + 3v'_x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2} = \frac{\partial z}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u'_y + 3v'_y = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} = \frac{\partial z}{\partial y}}$$

$$\boxed{dz = \frac{5}{2} dx + \frac{1}{2} dy}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

Ej 3 b) Hallar la mínima distancia (y máxima) de la cónica $5x^2+6xy+5y^2-16=0$ al origen de coordenadas. (Lagrange)
Explicar condición necesaria para la existencia de extremos y su interpretación geométrica

función distancia al origen: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Uso f^2 para hallar los puntos en donde hay máx y mínimos

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\,(5x^2+6xy+5y^2-16)$$

$$\begin{cases} L'_x=0=2x+\lambda(10x+6y) \rightarrow \lambda=\dfrac{-2x}{10x+6y} \quad \text{I} \\ L'_y=0=2y+\lambda(6x+10y) \rightarrow \lambda=\dfrac{-2y}{6x+10y} \quad \text{II} \\ L'_\lambda=0=5x^2+6xy+5y^2-16 \quad \text{III} \end{cases}$$

I y II
$$\frac{-2x}{10x+6y}=\frac{-2y}{6x+10y} \rightarrow x(6x+10y)=y(10x+6y)$$
$$6x^2+10xy=10xy+6y^2$$
$$\boxed{y=\pm x}$$

$\boxed{y=x}$ III $\quad 5x^2+6xx+5x^2-16=0$
$$16x^2=16 \rightarrow x=\pm1 \qquad \boxed{PC_1=(1,1)\quad PC_2=(-1,-1)}$$

$\boxed{y=-x}$ III $\quad 5x^2+6x(-x)+5(-x)^2-16=0$
$$4x^2=16 \rightarrow x=\pm2 \rightarrow \boxed{PC_3=(2,-2)\quad PC_4=(-2,2)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{(1,1)}=\sqrt{2}=f_{(-1,-1)} \\ f(2,-2)=2\sqrt{2}=f_{(-2,2)} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Distancia máxima}: 2\sqrt{2} \\ \quad '' \quad \text{mínima}: \sqrt{2} \end{array}}$$

Condición necesaria: que el gradiente de la función objetivo sea paralelo al gradiente de la restricción

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y)=x^2+y^2 \\ r(x,y)=5x^2+6xy+5y^2-16 \end{array}\right\} \quad \nabla g_{(x,y)}=\lambda\,\nabla r_{(x,y)}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH	1° parcial - recup.	HOJA N° 3/4 FECHA 2-12-25

EJ 4 a) Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 - 3xy$ en el punto $(-1,0)$ y en la dirección dada por $y = x+1$ sentido positivo del eje y ¿En qué direcciones ~~se anula~~ anula la deriv. direccional?

Como f es diferenciable (polinómica) $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(-1,0) = \nabla f_{(-1,0)} \cdot \breve{v}$

$$\bar{\nabla} f_{(-1,0)} = \left(\frac{2}{3}x - 3y,\ -3x\right)\Big|_{(-1,0)} = \boxed{\left(-\frac{2}{3}, 3\right) = \vec{\nabla} f_{(-1,0)}}$$

recta: $\bar{\beta}_{(t)} = (t, t+1) \rightarrow \bar{\beta}'_{(t)} = (1,1) = \vec{v} \longrightarrow \breve{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(-1,0) = \left(-\frac{2}{3}, 3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-2+9}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(-1,0) = \frac{7\sqrt{2}}{6}}$$

b) Determinar los puntos críticos de $f(x,y)$ si $\nabla f(x,y) = (h(x) + 6xy - 2y - 3,\ 3x^2 - 2x - 1)$ donde $h(x)$ es la sol. particular de $\frac{h'}{10} + \frac{3}{5x} = \frac{-1}{5x}h$ que pase por $(1;15)$. Clasificarlo

Hallo $h(x)$: para no tener fracciones, multiplico todo por $10x$

$$\frac{10xh'}{10} + \frac{3 \cdot 10}{5x}x + \frac{1 \cdot 10x}{5x}h = 0 \longrightarrow \boxed{x h'_{(x)} + 2h_{(x)} = -6}$$

SH) $xh' + 2h = 0 \rightarrow xh' = -2h \rightarrow x\frac{dh}{dx} = -2h \rightarrow \frac{1}{h}dh = \frac{-2}{x}dx$

integro m.a.m $\rightarrow \ln(h) = -2\ln(x) + c = \ln(x^{-2}) + c$

$$\boxed{h(x) = \frac{k}{x^2}}$$

SP) $h_p = C \rightarrow h'_p = 0 \qquad x \cdot 0 + 2\overbrace{C}^{h(x)} = -6 \qquad h_p = -3$

$h(x) = \frac{k}{x^2} - 3 \rightarrow h(1) = 15 = \frac{k}{1^2} - 3 \rightarrow k = 18$

$$\boxed{h(x) = \frac{18}{x^2} - 3}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

$$\nabla f_{(x,y)} = \left(\frac{18}{x^2} - 3 + 6xy - 2y - 3 ;\ 3x^2 - 2x - 1\right)$$

Para que sea PC $\Rightarrow \nabla f_{(x,y)} = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{18}{x^2} - 3 + 6xy - 2y - 3 = 0 = f'_x \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 = f'_y \longrightarrow \quad x_1 = 1 \qquad x_2 = -1/3 \end{cases}$$

$\boxed{x=1}$ $\quad \frac{18}{1^2} - 3 + 6y - 2y - 3 = 0 \quad \rightarrow 4y = -12 \rightarrow y = -3$

$$\boxed{PC_1 = (1,-3)}$$

$\boxed{x=-1/3}$ $\quad \frac{18}{(-1/3)^2} - 3 + 6\left(-\frac{1}{3}\right)y - 2y - 3 = 0$

$54 - 6 - 2y - 2y = 0 \rightarrow -48 = 4y \rightarrow \boxed{y = 12}$

$$\boxed{PC_2 = (-1/3, 12)}$$

$$\begin{cases} f''_{xx} = -\frac{18}{x^3} + 6y \\ f''_{xy} = 6x - 2 \\ f''_{yy} = 0 \end{cases} \qquad H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{x^3} + 6y & 6x-2 \\ 6x-2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|H_{(x,y)}| = -(6x-2)^2 \quad \forall (x,y) \in Dom(f)$$

$$\boxed{\nexists \text{ extremos}}$$

(resuelto por Sylvina)

AM 2 FRH	1° parcial - recup	HOJA N° 4/4 FECHA 2-12-25

Ej 5) a) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas

$$y^b - ax = 0 \rightarrow y^b = ax \rightarrow \boxed{a = \frac{y^b}{x}}$$

x es variable independiente

y es " dependiente (se deriva como una función)

$$b\, y^{b-1}\, y' - a = 0$$

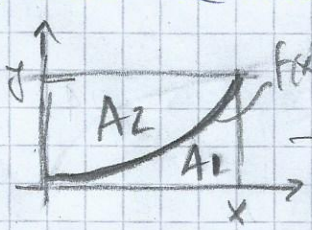
$$b\, y^{b-1}\, y' = \frac{y^b}{x}$$

$$y' = \frac{y^b}{x} \cdot \frac{1}{b\, y^{b-1}} = \frac{\cancel{y^b}}{x \quad b\, \cancel{y^b} \cdot y^{-1}}$$

$$y' = \frac{1}{b}\,\frac{y}{x} \xrightarrow{y' = \frac{dy}{dx}} bx\, dy = y\, dx$$

$$\boxed{y\, dx - bx\, dy = 0}$$

b) Una curva que responde a una función $y = f(x)$ pasa por el origen. Por un punto arbitrario de la curva (1° cuadrante) se trazan paralelas a los ejes de forma que se forme un rectángulo. La curva divide al rectángulo en dos regiones A, B tal que una de ellas tiene área m veces la otra. Hallar $y = f(x)$



$$A_2 = m A_1 \qquad A = A_1 + A_2 = A_1 + m A_1$$

$$A = A_1\,(m+1) = x \cdot y$$

$$A_1 = \int_0^x f(t) - 0 \; dt$$

$$\frac{d}{dx}\, xy = \frac{d}{dx}(m+1)\int_0^x f(t)\,dt$$

$$y + x y' = (m+1)\, f(x) \rightarrow y$$

$$x y' = (m+1)\, y - y = my + \cancel{y} - \cancel{y}$$

$$x \frac{dy}{dx} = my \rightarrow \frac{1}{y}\, dy = \frac{m}{x}\, dx \rightarrow$$

$$\ln(y) = m \ln(x) + c = \ln(x^m) + c$$

$$\boxed{y = k x^m}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)